Ludwik Kostro

Intuicje i rozumowania, które mogą pomóc w poznaniu modeli światów zamkniętych konstruowanych w kosmologii

Autor tego artykułu w latach osiemdziesiątych zeszłego stulecia brał udział w międzynarodowej konferencji *Communicating Physics* (Duisburg, Niemcy), podczas której starano się nauczyć jej uczestników przedstawiać trudne problemy z fizyki za pomocą najprostszych możliwych intuicji i rozumowań, czyli w sposób komunikatywny, maksymalnie poglądowy. Artykuł stanowi taką właśnie próbę posłużenia się prostymi intuicjami i rozumowaniami, które pomogą czytelnikowi niewtajemniczonemu w tajniki tensorowych równań ogólnej teorii względności (OTW) i kosmologii przyrodniczej zrozumieć, czym są światy zamknięte i dlaczego są one zamknięte.

O roli intuicji i rozumowań w matematyce oraz o ich związku z logiką wspaniale pisze w swych pracach Jarosław Mrozek[1]. Prace te i zaproszenie ich autora skłoniły mnie do napisania obecnego artykułu, w którym próbuję posługiwać się podstawowymi intuicjami geometrycznymi i możliwie najprostszymi rozumowaniami logicznymi i równaniami matematycznymi. Równania wyprowadzane są w prosty sposób, za pomocą znanych ze szkoły podstawowej i średniej przekształceń matematycznych.

Przedstawiony przez Einsteina w roku 1917 matematyczny model wszechświata, skonstruowany na podstawie jego OTW – należy to podkreślić – był modelem wszechświata zamkniętego[2]. W ten sposób relatywistyczna kosmologia przyrodnicza rozpoczęła swą historię od skonstruowania modelu zamkniętego. Ta zamkniętość powodowała, że charakteryzował się on odmienną, niż nam znaną ze szkoły, objętością V_{univ} i zakrzywionym promieniem R_{univ}:

---

[1] J. Mrozek, *Jak matematyka kształtuje nasz obraz świata*,[w:] *Filozoficzne i naukowo-przyrodnicze elementy obrazu świata*, nr 5-6, red. A. Latawiec i G. Bugajak, UKSW, Warszawa 2005, s. 69-82; *idem*, *Logika rozwoju matematyki*, [w:] *Logiczne podstawy rozumowań IV*, red. *idem*, Wyd. UG, 2009. s. 94-113.

[2] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitästeorie*, Sitzungsberichten der Preussischen Akad. D. Wissenschaften 1917, [w:] H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *Das Relativitätspricip*, Verlag und Druk von B.G. Teubner, Leipzig 1922, s. 130-139.

$$V_{univ} = 2\pi^2 R^3_{\ univ} \qquad (1)$$

Zwróćmy od razu uwagę na to, że równanie (1) różni się znacznie od równania na objętość kuli, znanej nam z nauczania szkolnego, które przedstawia się następująco:

$$V_{eukl} = (4/3)\pi r^3 \qquad (2)$$

gdzie r, w odróżnieniu od R, jest promieniem prostym, a nie zakrzywionym. Przy założeniu, że r co do swej długości jest równe R, łatwo zauważymy, że relacja:

$$V_{univ}/V_{eukl} = (2\pi^2 R^3_{\ univ})/\ (4/3)\pi r^3 = 4{,}71 \qquad (3)$$

co znaczy, że pojemność kubiczna zamkniętego sferycznego świata w modelu Einsteina jest o 4,71 razy większa od pojemności kubicznej kuli z geometrii szkolnej, którą nazywamy euklidesową od nazwiska starożytnego geometry greckiego Euklidesa. Zamknięty sferyczny świat z artykułu Einsteina zawiera w sobie zatem o 4,71 razy więcej metrów sześciennych niż kule znane nam z życia codziennego opisane przez Euklidesa.

Podkreślmy, że omawiany zamknięty model Einsteina stanowi nieeuklidesową hipersferę o powierzchni zerowej $A = 0$ i posiadającą nieeuklidesowy zakrzywiony promień $R > 0$ oraz znaną nam już nieeuklidesową objętość $V = 2\pi^2R^3$, podobnie jak zamknięty okrąg na kuli jest okręgiem o zerowym obwodzie $L = 0$ i posiadającym nieeuklidesowy zakrzywiony promień $R > 0$ oraz nieeuklidesową powierzchnię:

$$A = (4/\pi)R^2 \qquad (4)$$

Spróbujmy teraz dojść do podstawowych intuicji i ukazać podstawowe rozumowania, które pomogą nam wyobrazić sobie i zrozumieć nieeuklidesowy okrąg bez obwodu i nieeuklidesową kulę bez powierzchni. Musimy jednak najpierw zapoznać się, przynajmniej w sposób bardzo skrótowy, ze znanymi obecnie trzema geometriami.

1. Trzy geometrie

1.1. Geometria o krzywiźnie zerowej czyli płaska (Euklidesa)

Najpierw przypomnijmy sobie podstawowe twierdzenia geometrii płaskiej, znanej nam ze szkoły. Przyjęło się oznaczać, w kosmologii przyrodniczej, płaskość takiej geometrii parametrem krzywizny zerowej $k = 0$. Z taką geometrią, zwaną euklidesową, mamy do czynienia na przykład na płaszczyźnie, gdy rozważamy ją w dwóch wymiarach. Zaznaczmy tu od razu, że można ją rozważać także w trzech i więcej wymiarach. Gdy narysujemy na płaszczyźnie trójkąt, wówczas, jak dobrze wiemy, suma jego kątów będzie się równać 180°. Jeśli trójkąt ten będzie prostokątny, to zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa kwadrat jego przeciwprostokątnej równać się będzie sumie kwadratów jego przyprostokątnych. Jeśli narysujemy na płaszczyźnie okrąg, to, jak wiemy z lat szkolnych, jego obwód $L = 2\pi r$, a jego powierzchnia $A = \pi r^2$. Jeśli narysujemy na płaszczyźnie linię prostą, to przez punkt leżący poza tą prostą przeprowadzić można tylko jedną równoległą.

1.2. Geometria o krzywiźnie dodatniej (C.F. Gaussa)

Inaczej przedstawia się sprawa w geometrii o krzywiźnie dodatniej. W tej geometrii parametr krzywizny oznacza się symbolem $k = +1$. Krzywizna taka, gdy rozważamy ją tylko w dwóch wymiarach, występuje na przykład na powierzchni kuli (lub elipsoidy). Oczywiście rozważać ją można także w trzech i więcej wymiarach. Geometria ta nazywana jest geometrią sferyczną. Jeżeli na powierzchni kuli narysujemy trójkąt, to jego kąty będą miały tendencje do rozwartokątności i dlatego suma kątów takiego trójkąta będzie większa niż 180°. Jeżeli taki trójkąt będzie prostokątny, to zwykłe twierdzenie Pitagorasa nie będzie miało zastosowania do takiego trójkąta. Trzeba to twierdzenie poszerzyć na geometrie nieeuklidesowe. Takiego poszerzenia dokonał niemiecki geometra B. Riemann.

Jeżeli na powierzchni kuli narysujemy okrąg, to jego promień będzie zakrzywiony i obwód takiego okręgu będzie mniejszy, $L < 2\pi R$. Jeżeli na powierzchni kuli narysujemy odpowiednik prostej, tzw. geodetykę – najkrótszą linię łączącą dwa punkty, to przez punkt leżący poza tą linią nie da się narysować linii równoległej. Taka druga geodetyka przetnie zawsze w dwóch punktach pierwszą geodetykę.

1.3. Geometria o krzywiźnie ujemnej (J. Bolyaia i M. Łobaczewskiego)

Jeszcze inaczej przedstawia się sprawa w geometrii o krzywiźnie ujemnej. W tej geometrii parametr krzywizny oznacza się symbolem $k = -1$. Krzywizna taka, gdy rozważamy ją tylko w dwóch wymiarach, występuje na powierzchni lejka (lub siodła). Oczywiście rozważać ją można również w trzech lub więcej wymiarach. Geometria ta nazywana jest geometrią hiperboliczną. Jeżeli na powierzchni lejka narysujemy trójkąt, to jego kąty będą miały tendencje do ostrokątności i dlatego suma kątów takiego trójkąta będzie mniejsza niż 180°. Jeżeli taki trójkąt będzie prostokątny, to zwykłe twierdzenie Pitagorasa również nie będzie miało zastosowania do takiego trójkąta. Poszerzył je także na tę geometrię B. Riemann. Jeżeli na powierzchni lejka narysujemy okrąg, to jego promień będzie zakrzywiony i obwód takiego okręgu będzie większy, $L > 2\pi R$. Jeżeli na powierzchni lejka narysujemy odpowiednik prostej, tj. geodetykę, to przez punkt leżący poza tą linią można będzie narysować wiele geodetyk, które nie przekroją się z pierwszą geodetyką.

1.4. Przedmioty o potrójnej geometrii

W przyrodzie istnieją przedmioty o potrójnej geometrii. Przykładem dwuwymiarowej przestrzeni, w której występują wszystkie trzy geometrie, jest powierzchnia gruszki zwanej klapsą. Na powierzchni tej gruszki występują miejsca stanowiące fragmenty powierzchni kuli (krzywizna dodatnia). Istnieją na niej także miejsca, które stanowią fragmenty lejka (krzywizna ujemna). Powierzchnia gruszki klapsy jest na tyle nieforemna, że nie brak na niej także miejsc płaskich (krzywizna zerowa). Riemann stworzył geometrię, która łączy wszystkie trzy geometrie i pozwala opisywać i przechodzić z jednej do drugiej. Za pomocą niej opisuje się bez trudności powierzchnię omawianej gruszki.

2. Przestrzenie zamknięte bez granic, ale skończone

Należy tu zaznaczyć, że przestrzenie zamknięte (jedno- dwu- trój- i wielowymiarowe) pojawiają się tylko w geometrii sferycznej, tj. w geometrii o krzywiźnie dodatniej, czyli gdy $k = +1$. Zaznaczmy tu od razu, że w przestrzeniach zamkniętych (jedno-, dwu-, trój- i wielowymiarowych) zamknięta jest zawsze ich średnica $D = 2R$.

2.1. Jednowymiarowa przestrzeń zamknięta

Wspomniana wyżej średnica $D = 2R$, będąc krzywą zamkniętą, stanowi jednowymiarową przestrzeń zamkniętą i w najprostszym przypadku przypomina obwód dwuwymiarowego okręgu na powierzchni płaskiej, sferycznej lub hiperbolicznej. Mówi się wtedy o zanurzeniu jednowymiarowej przestrzeni zamkniętej w dwuwymiarowej przestrzeni płaskiej, sferycznej lub hiperbolicznej. Dodajmy, że może ona być zanurzona również w trój- i wielowymiarowej przestrzeni płaskiej i sferycznej.

Zaznaczmy, że każdy punkt zamkniętej jednowymiarowej przestrzeni stanowi jej środek i punkt zamknięcia. Żaden z punktów tej jednowymiarowej przestrzeni nie jest wyróżniony. Można zatem powiedzieć również, że środek i punkt zamknięcia takiej jednowymiarowej przestrzeni znajduje się wszędzie na tej krzywej zamkniętej. Każdy punkt na tej krzywej zamkniętej można sobie wybrać jako jej środek lub jako punkt jej zamknięcia.

Jednowymiarowa przestrzeń zamknięta, podobnie jak dwu- trój- i wielowymiarowe przestrzenie zamknięte, ma swój współczynnik krzywizny $C = \pi/R$. Aby zrozumieć, czym jest ten współczynnik, zanurzmy najpierw jednowymiarową zamkniętą przestrzeń sferyczną w dwuwymiarowej przestrzeni płaskiej. W tej sytuacji ta jednowymiarowa zamknięta przestrzeń o średnicy $D = 2R$ stanowi obwód dwuwymiarowego okręgu o prostym promieniu r i długości $2\pi r$. Zauważmy, że im dłuższy jest promień r, tym mniej krzywy staje się obwód okręgu, czyli też zmniejsza się krzywizna jednowymiarowej przestrzeni zamkniętej, utożsamionej ze wspomnianym obwodem. Jeśli r dąży do nieskończoności, to krzywizna obwodu coraz bardziej się prostuje i zbliża do linii prostej. Czyli współczynnik krzywizny w tym przypadku jest odwrotnie proporcjonalny do promienia płaskiego okręgu:

$$C = 1/r \qquad (5)$$

Jest to współczynnik krzywizny obwodu dwuwymiarowego płaskiego okręgu. Aby wprowadzić współczynnik krzywizny jednowymiarowej przestrzeni, musimy pozbyć się dwuwymiarowości pochodzącej z zanurzenia jej w dwuwymiarowej przestrzeni płaskiej. Trzeba zastąpić prosty promień r płaskiego dwuwymiarowego okręgu krzywym promieniem R jednowymiarowej przestrzeni. Takiej operacji dokonuje się w prosty sposób. Ze wspomnianej zależności $D = 2R = 2\pi r$ wynika, że $R = \pi r$, czyli $r = R/\pi$. Jeżeli ostanie równanie wstawimy do równania (5), to otrzymamy:

$$C = \pi/R \qquad (6)$$

A zatem krzywizna jednowymiarowej zamkniętej przestrzeni jest odwrotnie proporcjonalna do długości krzywego promienia jednowymiarowej zamkniętej przestrzeni.

Jak dobrze wiemy, obwód okręgu w dwuwymiarowej przestrzeni to zbiór punktów równo odległych od punktu, który stanowi środek okręgu. Jest czymś oczywistym, że w jednowymiarowej przestrzeni okrąg to tylko dwa punkty równo odległe od punktu, który wybraliśmy sobie za środek. Jeżeli te dwa punkty się pokryją, ale nie pokrywają się z punktem obranym za środek, to mamy do czynienia z jednowymiarową przestrzenią zamkniętą. Natomiast jeśli te dwa punkty się nie pokrywają, to mamy do czynienia z jednowymiarową krzywą przestrzenią niedomkniętą. Zwróćmy uwagę na to, że zamknięta jednowymiarowa przestrzeń dzieli się zawsze na dwie niedomknięte przestrzenie jednowymiarowe (wypukłą i wklęsłą lub równe). Suma promieni tych dwóch niedomkniętych jednowymiarowych przestrzeni równa się zawsze promieniowi przestrzeni zamkniętej, $R_1 + R_2 = R$. Promienie niedomknięte stanowią ułamki promienia R. Jeśli na przykład promień jednego niedomkniętego okręgu jednowymiarowego $R_1 = (2/3)\,R$, to promień drugiego $R_2 = (1/3)R$, a w przypadku używania ułamków dziesiętnych – gdy $R_1 = (0{,}1)R$, wówczas $R_2 = (0{,}9)R$ itp. W sposób ogólny można to zapisać następująco:

$$R_{m1/n} + R_{m2/n} = R_{n/n} \qquad (7)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, 4\ldots$, m_1 i $m_2 = 1, 2, 3, 4\ldots$, ale $m \le n$, a $m_1 + m_2 = n$. Tym zapisem posługiwać się będziemy przy omawianiu dwu- i trójwymiarowych przestrzeni niedomkniętych i zamkniętych.

Na zakończenie tego paragrafu zaznaczmy, że jednowymiarowa zamknięta przestrzeń stanowić będzie jednowymiarowy przekrój wszechświata w jego trójwymiarowym modelu zamkniętym. Przekrój ten stanowić będzie jego zamkniętą średnicę $D_{univ} = 2R_{univ}$.

2.2. Dwuwymiarowa przestrzeń zamknięta

Przejdźmy teraz do dwuwymiarowej przestrzeni zamkniętej. Jak zobaczymy, będzie to okrąg o krzywym promieniu R, bez brzegów, tj. bez obwodu ($L = 0$). Dwuwymiarową przestrzeń zamkniętą stanowi, w najprostszym przypadku, powierzchnia kuli euklidesowej lub nieeuklidesowej sferycznej. Takie kule to już twory trójwymiarowe. Dwuwymiarowa przestrzeń zamknięta może być zatem zanurzona w trójwymiarowej przestrzeni płaskiej lub sferycznie zakrzywionej. Mówimy tu o najprostszym przypadku, o kuli, jednak z zamkniętymi dwuwymiarowymi przestrzeniami mamy też do czynienia na elipsoidach i innych trójwymiarowych figurach geometrycznych o zamkniętej powierzchni. Taką zamkniętą dwuwymiarową przestrzenią może być na przykład powierzchnia figury przypominająca gruszkę lub żarówkę.

Aby zrozumieć, jak to się dzieje, że możliwy jest okrąg bez obwodu, spróbujmy narysować okrąg na powierzchni kuli. Wybierzmy sobie dowolny punkt na tej powierzchni jako środek okręgu i narysujmy zbiór punktów równoodległych od tego środka. Otrzymamy w ten sposób obwód takiego okręgu, mającego zakrzywiony promień $R_{m/n}$. Dodaliśmy wskaźnik m/n, bo – jak zobaczymy – stanowić on będzie ułamek całkowitego promienia zamkniętej dwuwymiarowej przestrzeni. Zacznijmy teraz powiększać rysowany okrąg. Jego promień i obwód się powiększą. Gdy promień będzie $R_{1/2}$, wówczas obwód będzie największy i leżeć będzie na równiku kuli. Jeżeli dalej powiększać będziemy okrąg, to w dalszym ciągu jego promień będzie rósł, ale jego obwód zacznie się zmniejszać. Gdy promień rysowanego okręgu $R_{m/n} = R_{n/n} = R$, wówczas obwód rysowanego okręgu zmniejszy się do zera, $L = 0$. Powierzchnia tego okręgu zamknie się i pokryje powierzchnię całej kuli. Mamy wtedy do czynienia z dwuwymiarową przestrzenią zamkniętą, czyli okręgiem bez obwodu. Geometrzy wyprowadzili wzór, który umożliwia obliczyć powierzchnię A takiego okręgu, stanowiącego dwuwymiarową zamkniętą przestrzeń. Oto on:

$$A = (4/\pi)R^2 = 4\pi/C^2 \qquad (8)$$

gdzie R to całkowity promień okręgu bez obwodu, a $C = \pi/R$ to znany nam już współczynnik krzywizny, w tym przypadku zakrzywionej dwuwymiarowej powierzchni. Geometra i fizyk V. Kourganoff[3] wyprowadził równanie (8) w sposób fachowy, charakterystyczny dla podręczników naukowych, ale trudny do zrozumienia

[3] V. Kourganoff, *Introduction to Advanced Astrophysics*, Reidel, Dordrecht, Boston, London 1980, s. 362–367.

dla czytelnika nie będącego zawodowym geometrą. Spróbujmy dojść do wzoru matematycznego (8) w sposób prostszy, na podstawie danych znanych nam z lat szkolnych. Być może już w szkole podstawowej uczono nas, że powierzchnię kuli (oczywiście euklidesowej) możemy wyliczyć za pomocą wzoru:

$$A = 4\pi r^2 \qquad (9)$$

gdzie r to prostoliniowy promień kuli, która jest figurą trójwymiarową. Promień r kuli stanowi trzeci wymiar w stosunku do jej dwuwymiarowej powierzchni. Wiemy już, że średnica dwuwymiarowego zamkniętego okręgu $D = 2R$, gdzie R to zakrzywiony promień tego okręgu bez obwodu. Jest rzeczą jasną, że średnica D, gdy rozważamy ją jako zanurzoną w przestrzeni trójwymiarowej, ma wzór $D = 2\pi r$. Czyli $2R = 2\pi r$, więc $R = \pi r$ i stąd:

$$r = R/\pi = 1/C \qquad (10)$$

Jeżeli podstawimy (10) do (9), otrzymamy:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(R^2/\pi^2) = (4/\pi)R^2 \quad \text{lub} \quad A = 4\pi r^2 = 4\pi/C^2$$

W ten sposób za pomocą prostych przekształceń doszliśmy do równania (8), pozbywając się równocześnie zanurzenia w trójwymiarowości. R i $C = \pi/R$ w naszym przypadku to już parametry zamkniętego dwuwymiarowego okręgu.

Zaznaczmy, że każdy punkt zamkniętej dwuwymiarowej przestrzeni może stanowić jej środek i punkt zamknięcia. Żaden z punktów tej dwuwymiarowej przestrzeni nie jest wyróżniony. Można zatem powiedzieć również, że środek i punkt zamknięcia takiej dwuwymiarowej przestrzeni znajdują się wszędzie na tej krzywej dwuwymiarowej powierzchni zamkniętej. Każdy punkt na tej krzywej powierzchni zamkniętej można sobie wybrać jako jej środek lub jako punkt jej zamknięcia.

Jeżeli narysujemy na powierzchni kuli okrąg z obwodem $L > 0$, to podzielimy tę powierzchnię na dwa okręgi niedomknięte o takim samym obwodzie, $L_1 = L_2$. Okręgi te różnić się będą jednak promieniem, $R_1 \neq R_2$, i powierzchnią, $A_1 \neq A_2$. Okręgi niedomknięte o mniejszym promieniu i powierzchni nazywamy wypukłymi, a okręgi o większym promieniu i powierzchni nazywamy wklęsłymi. Jedynie gdy obwód obu okręgów pokryje się z równikiem kuli, wówczas nie tylko $L_1 = L_2$, ale również, $R_1 = R_2$ i $A_1 = A_2$. Wtedy też nie ma sensu mówić o ich wklęsłości czy wypukłości. Są one po prostu sobie równe. Stanowią dwa identyczne okręgi niedomknięte, $R_1 = R_2 = R_{1/2}$ i $A_1 = A_2 = A_{1/2}$.

Ponieważ środek rysowanego okręgu możemy wybrać sobie dowolnie i ponieważ taki akt podzieli nam dwuwymiarową powierzchnię zamkniętą na dwa okręgi (wypukły, wklęsły lub dwa równe), więc jest rzeczą oczywistą, że możemy podzielić sobie taką powierzchnię na niezliczoną ilość par okręgów niedomkniętych. Suma obu powierzchni takiej pary okręgów równać się będzie zawsze totalnej dwuwymiarowej powierzchni zamkniętej, wyrażonej znanym nam już równaniem (8), które tu powtarzamy:

$$A_{tot} = (4/\pi)R^2_{tot} \qquad (11)$$

Powyższe równanie można tak uogólnić, że umożliwi ono nie tylko obliczania powierzchni okręgu zamkniętego, ale również wyliczanie powierzchni okręgów niedomkniętych (wypukłych, wklęsłych i równych) $A_{m1/n}$ i $A_{m2/n}$, czyli ułamkowych powierzchni $A_{m/n}$ zamkniętej dwuwymiarowej przestrzeni. Jest rzeczą oczywistą, że równanie, które napiszemy, zawierać będzie równanie (11), co uważny czytelnik zauważy w jego zapisie. Stosować je będzie można także do wyliczenia powierzchni zamkniętego okręgu nieeuklidesowego. Przypomnijmy, że koniecznie $m_1 + m_2 = n$ i każde $m \leq n$.

Uogólniony wzór na powierzchnię niedomkniętych okręgów (wypukłych, wklęsłych i równych) oraz zamkniętego okręgu nieeuklidesowej geometrii sferycznej

Spróbujmy zatem tak uogólnić równanie (11), aby móc za jego pomocą wyliczać nie tylko powierzchnię totalną zamkniętego okręgu, nie posiadającego obwodu, ale także powierzchnie okręgów nie zamkniętych w nieeuklidesowej dwuwymiarowej geometrii sferycznej i przez to posiadających obwody. Autor tego artykułu doszedł do takiego uogólnienia, rozważając szereg poszczególnych przypadków i dostrzegając w nich pewną prawidłowość, która objawia się w relacjach między m i n, gdzie m oznacza licznik, a n mianownik ułamka totalnego krzywego promienia R zamkniętego okręgu. Gdy okrąg posiada promień, który jest ułamkiem promienia okręgu zamkniętego, wówczas nie jest on zamknięty. Oto równanie uogólnione:

$$A_{m/n} = (4/\pi)(n/m)R^2_{m/n} \qquad (12)$$

Aby zapoznać się z możliwościami tego równania przeanalizujmy kilka przykładów.

Przykład 2.1. Jeżeli $m = n$, czyli jeżeli $R_{m/n} = R_{n/n} = R$, to równanie (12) przybiera postać równania (8), $A = (4/\pi)R^2$, i powierzchnia A jest dwuwymiarową powierzchnią zamkniętą, czyli okręgiem bez obwodu. To ostatnie stanie się dla nas jaśniejsze, gdy zapoznamy się z równaniem umożliwiającym wyliczanie obwodu niedomkniętych okręgów o krzywiźnie sferycznej ($k = +1$).

Przykład 2.2. Jeżeli $m = 1$, a $n = 4$, to otrzymamy równanie $A_{1/4} = (4/\pi)(4/1)R^2_{1/4} = (16/\pi)R^2_{1/4}$. To równanie umożliwia nam obliczyć powierzchnię okręgu wypukłego o promieniu równym $(1/4)R$.

*Przykład 2.3***.** Odpowiadający okręgowi wypukłemu z przykładu 2.2., okrąg wklęsły będzie miał powierzchnię $A_{3/4} = (4/\pi)(4/3)R^2_{3/4} = (16/3)\pi R^2_{3/4}$. Otrzymane równanie umożliwia nam obliczyć powierzchnię okręgu wklęsłego o promieniu równym $(3/4)R$.

Jest rzeczą jasną, że suma $A_{1/4} + A_{3/4} = A$. Łatwo to wykazać:

$$A_{1/4} + A_{3/4} = (4/\pi)(4/1)R^2_{1/4} + (4/\pi)\ (4/3)R^2_{3/4} = (16/\pi)R^2_{1/4} + (16/3\pi)R^2_{3/4} = (4/\pi)R^2 = A$$

Wzór na obwód okręgów (zerowego zamkniętego i niezerowych niedomkniętych) w zakrzywionej dwuwymiarowej geometrii sferycznej

W sposób trochę bardziej złożony wyprowadzić można równanie pozwalające na wyliczanie wspólnych pokrywających się obwodów par okręgów niedomkniętych (wypukłych, wklęsłych i równych) i zerowego obwodu okręgu zamkniętego. Ramy tego artykułu nie pozwalają na szczegółowe ukazanie takiego wyprowadzenia (rysunkowego i za pomocą symboli). Metoda dojścia do szukanego równania polega również i w tym przypadku na przebadaniu szeregu n przypadków konkretnych i wykryciu prawidłowości zachodzących w relacjach między m i n. Oto otrzymane równanie:

$$L_{m/n} = (2n/m)\ \sin\pi(m/n)R_{m/n} \qquad (13)$$

Przykład 2.4. Jeżeli $m = n$, czyli jeżeli $R_{m/n} = R_{n/n} = R$, to równanie (13) przybierze postać podstawową:

$$L = 2\sin\pi R = 0$$

co wskazuje nam, że obwód okręgu sferycznego zamkniętego równy jest zeru. Jest bowiem rzeczą znaną, że $\sin\pi = \sin 180^{\circ} = 0$.

Przykład 2.5. Jeżeli $m = 1$, a $n = 2$, to $R_{1/2} = (1/2)R$. W tym przypadku obwód okręgu

$$L_{1/2} = 2 \times 2/1\sin\pi 1/2R_{1/2} = 4\ \sin(\pi/2)R_{1/2} = 4R_{1/2} = 2R$$

jest bowiem rzeczą znaną, że $\sin\pi/2 = \sin 90^{\circ} = 1$. W rozważanym przykładzie powierzchnie obu okręgów są sobie równe, $A_{1/2} = A_{1/2}$, a ich pokrywające się obwody, $L_{1/2} = L_{1/2}$, leżą na równiku.

Przykład 2.6. Jak już wiemy, rysując na powierzchni kuli okrąg niedomknięty (nie stanowiący zamkniętej dwuwymiarowej przestrzeni), dzielimy tę powierzchnię na dwa okręgi, na ogół jeden wypukły, a drugi wklęsły (poza przypadkiem z przykładu 2.5). Obwody tych okręgów pokrywają się i dlatego są sobie równe, na przykład $L_{1/4} = L_{3/4}$. Oba okręgi różnić się jednak będą powierzchnią, $A_{1/4} \neq A_{3/4}$ (z jednym tylko wyjątkiem, gdy $A_{1/2} = A_{1/2}$). Wróćmy do rozważanego tu przykładu i spróbujmy wykazać, że $L_{1/4} = L_{3/4}$;

$$L_{1/4} = 2 \times 4/1\ [\sin(\pi/4)R_{1/4}] = 8 \sin 45^{o} \times (1/4)R$$
$$L_{3/4} = 2 \times 4/3[\sin(3\pi/4)R_{3/4}] = (8/3)\sin 135^{o} \times (3/4)R$$

Ponieważ $\sin 45^{o} = \sin 135^{o}$ i występujące w równaniu trójki $3/3 = 1$, stąd $L_{1/4} = L_{3/4}$.

Na zakończenie tego paragrafu zaznaczmy, że dwuwymiarowa zamknięta przestrzeń stanowić będzie dwuwymiarowy przekrój wszechświata w jego trójwymiarowym modelu zamkniętym. Przekrój ten dzielić będzie wszechświat na dwie kule o tej samej powierzchni i tej samej objętości.

2.3. Trójwymiarowa przestrzeń zamknięta

Przejdźmy teraz do trójwymiarowej przestrzeni zamkniętej. Jak zobaczymy, będzie to hiperkula o krzywym promieniu R bez brzegów, tj. bez powierzchni ($A = 0$). Znamy już wzór na objętość trójwymiarowej zamkniętej przestrzeni z równania (1) stosowanego przez Einsteina:

$$V = 2\pi^2 R^3 \qquad (14)$$

Równanie to w sposób fachowy wyprowadza na przykład cytowany już profesor Uniwersytetu Paryskiego V. Kourganoff[4]. Znane jest ono od czasu powstania nieeuklidesowej geometrii sferycznej. Stosował je w roku 1917 Einstein[5].

Uogólniony wzór na objętość nie zamkniętych kul wypukłych, wklęsłych i równych oraz zamkniętej hiperkuli w nieeuklidesowej geometrii sferycznej

Równanie (14) można uogólnić tak, aby służyło do wyliczania objętości nie tylko zamkniętej trójwymiarowej hiperkuli, ale również par kul niedomkniętych (wypukłych, wklęsłych i równych), $V_{m1/n}$ i $V_{m2/n}$, czyli ułamkowych objętości $V_{m/n}$ zamkniętej trójwymiarowej przestrzeni (hiperkuli). Jest rzeczą oczywistą, że równanie, które napiszemy, zawierać będzie równanie (14), co czytelnik zauważy w jego zapisie. Przypomnijmy, że koniecznie $m_1 + m_2 = n$ i każde $m \leq n$;

[4] V. Kourganoff, *op. cit.*, s. 371–375.
[5] A. Einstein, *op. cit.*, s. 139.

$$V_{m/n} = 2(n^2/m^2)\, \pi^2 R^3_{\ m/n} \qquad (15)$$

Przykład 2.7. Jeżeli $m = n$, to równanie (15) przybiera postać $V_{n/n} = 2\, \pi^2 R^3_{\ n/n}$ i służy do wyliczania objętości zamkniętej hiperkuli.

Przykład 2.8. Jeżeli $m = 1$, a $n = 2$, to równanie (15) przybiera postać $V_{1/2} = 8\, \pi^2 R^3_{\ 1/2}$ i służy do obliczenia objętości nieeuklidesowej kuli o maksymalnej możliwej powierzchni. Hiperkula dzieli się na dwie takie kule o równej objętości.

Przykład 2.9. Jeżeli $m = 1$, $n = 3$, to równanie (15) przybiera postać $V_{1/3} = 18\, \pi^2 R^3_{\ 1/3}$.

Przykład 2.10. Jeżeli $m = 2$, $n = 3$, to równanie (15) przybiera postać $V_{2/3} = 9/2\, \pi^2 R^3_{\ 2/3}$. Jasną jest rzeczą, że $V_{1/3} + V_{2/3} = V$.

Zaznaczmy, że każdy punkt zamkniętej trójwymiarowej przestrzeni może stanowić jej środek i punkt zamknięcia. Żaden z punktów tej trójwymiarowej przestrzeni nie jest wyróżniony. Każdy z nich stanowi środek tej przestrzeni i punkt jej zamknięcia. Można zatem powiedzieć również, że środek i punkt zamknięcia takiej trójwymiarowej przestrzeni znajdują się w niej wszędzie. Każdy punkt w tej krzywej trójwymiarowej przestrzeni zamkniętej można sobie wybrać jako jej środek lub jako punkt jej zamknięcia.

Ponieważ środek niedomkniętej kuli (wypukłej, wklęsłej lub równej drugiej kuli niedomkniętej) możemy wybrać sobie dowolnie i ponieważ taki akt podzieli nam trójwymiarową przestrzeń zamkniętą na dwie kule (wypukłą, wklęsłą lub dwie niedomknięte kule równe), więc jest rzeczą oczywistą, że możemy podzielić sobie naszą hiperkulę zamknięta na niezliczoną ilość par kul niedomkniętych. Suma objętości takiej pary kul równać się będzie zawsze objętości totalnej rozważanej trójwymiarowej przestrzeni zamkniętej:

$$V_{tot} = 2\pi^2 R^3_{\ tot}$$

Wzór na powierzchnie kul (powierzchni zerowej kuli zamkniętej, hiperkuli, i powierzchni niezerowych kul niedomkniętych) w zakrzywionej trójwymiarowej geometrii sferycznej

W sposób trochę bardziej złożony wyprowadzić można równanie pozwalające na wyliczanie wspólnych pokrywających się powierzchni par kul niedomkniętych (wypukłych, wklęsłych i równych) i zerowej powierzchni zamkniętej hiperkuli. Ramy tego artykułu nie pozwalają na szczegółowe ukazanie takiego wyprowadzenia (rysunkowego i za pomocą symboli). Metoda dojścia do szukanego równania polega również i w tym przypadku na przebadaniu szeregu przypadków konkretnych i wykryciu prawidłowości zachodzących w relacjach między m i n. Oto otrzymane tą metodą równanie:

$$A_{m/n} = (4/\pi)(n^2/m^2)[\sin\pi(m/n)R_{m/n}]^2 \quad (16)$$

Przykład 2.11. Aby uzyskać równanie podstawowe odnoszące się do powierzchni zerowej trójwymiarowej zamkniętej hiperkuli, rozważmy przypadek, w którym $m = 1$ i $n = 1$. W takim przypadku równanie (16) przybiera postać:

$$A_{1/1} = (4/\pi)(\sin\pi\, R_{1/1})^2 \quad (17)$$

Ponieważ sin π = sin 180° = 0, hiperkula nie posiada powierzchni, podobnie jak okrąg zamknięty w geometrii sferycznej nie posiada obwodu.

Przykład 2.12. Rozważmy teraz przypadek, w którym $m = 1$, a $n = 2$. W tym przypadku równanie (16) przybiera postać:

$$A_{1/2} = (4/\pi)4[\sin(\pi/2)\, R_{1/2}]^2$$

Ponieważ sin $\pi/2$ = sin 90° = 1, przekrój dwuwymiarowy hiperkuli ma powierzchnię:

$$A_{1/2} = (16/\pi)R^2_{1/2} \quad (18)$$

gdzie $R_{1/2}$ jest promieniem zakrzywionym i stanowi połowę promienia hiperkuli. Hiperkula bez powierzchni dzieli się na dwie kule o maksymalnej wspólnej powierzchni $A_{1/2} = (16/\pi)R^2_{1/2}$, podobnie jak okrąg zamknięty bez obwodu dzieli się na dwa okręgi o maksymalnym wspólnym obwodzie $2R = 4R_{1/2}$, przedstawionym w paragrafie 2.2 tego artykułu. Ponieważ $R_{1/2} = 1/2R$, więc $R_{1/2}{}^2 = 1/4R^2$. Jeżeli podstawimy to ostatnie równanie do (18), otrzymamy równanie, które ukazuje dwuwymiarowy przekrój hiperkuli uzależniony od całego promienia hiperkuli:

$$A_{1/2} = (4/\pi)R^2 \quad (19)$$

Równanie (19) pokrywa się z równaniem (8), a zatem dwuwymiarowy przekrój trójwymiarowej przestrzeni zamkniętej stanowi dwuwymiarową przestrzeń zamkniętą:

$$A_{1/2} = (16/\pi)R^2_{1/2} = (4/\pi)R^2$$

Dokonując pewnego podsumowania, uświadommy sobie jeszcze raz, że jednowymiarowy przekrój trójwymiarowej zamkniętej przestrzeni stanowi jednowymiarową przestrzeń zamkniętą o promieniu R i średnicy zamkniętej $D = 2R$ oraz że dwuwymiarowy przekrój trójwymiarowej zamkniętej przestrzeni stanowi dwuwymiarową przestrzeń zamkniętą o promieniu R, o średnicy zamkniętej $D = 2R$ i o powierzchni zamkniętej $A = (4/\pi)R^2$.

Przykład 2.13. Sprawdźmy, czy pokrywające się powierzchnie pary kul (na które podzielona jest hiperkula), jednej wypukłej $A_{1/4}$ i drugiej wklęsłej $A_{3/4}$, są rzeczywiście sobie równe. W pierwszym przypadku $m = 1$, a $n = 4$. Stosując równanie (16), otrzymamy:

$$A_{1/4} = (4/\pi)16(\sin\pi/4 \times R_{1/4})^2$$

Ponieważ $\sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$, a $R_{1/4} = 1/4R$, więc:

$$A_{1/4} = (4/\pi)16[(\sqrt{2}/2)(1/4)R]^2 = (4/\pi)16(2/4)(1/16)R^2 = (4/\pi)(2/4)R^2 = (2/\pi)R^2$$

W drugim przypadku $m = 3$, a $n = 4$. Stosując równanie (16), otrzymamy:

$$A_{3/4} = (4/\pi)(16/9)[\sin\pi(3/4)R_{3/4}]^2$$

Ponieważ również $\sin\pi(3/4) = \sqrt{2}/2$, a $R_{3/4} = 3/4R$, więc $A_{3/4} = (4/\pi)(2/4)\ R^2$, a zatem $A_{1/4} = A_{3/4} = (2/\pi)R^2$.

3. Obecność masy grawitacyjnej, zakrzywiającej przestrzeń, według OTW Einsteina

To, o czym była mowa dotąd, było czystą geometrią. Trzeba przejść teraz do fizyki i zapytać się, czy przestrzeń fizyczna, która stanowi „jakby" naczynie wszechświata, jest w skali globalnej płaska (krzywizna zerowa), zamknięta (krzywizna dodatnia), czy otwarta (krzywizna ujemna). Jak dobrze wiadomo, według OTW Einsteina to obecność materii (masy grawitacyjnej) zakrzywia dodatnio przestrzeń i czasoprzestrzeń i może spowodować ich zamknięcie. W dalszej części artykułu ukazana zostanie w prosty sposób relacja zachodząca między masą M i średnią jej gęstością ρ, które zakrzywiają wszechświat, a promieniem R, od którego zależy objętość zamkniętego świata. Dodajmy jeszcze, że w OTW promień świetlny i swobodne ciała biegną z zasady po geodetykach, tam gdzie przestrzeń jest płaska – po linii prostej, a tam gdzie jest sferyczna lub hiperboliczna – po geodetycznych liniach krzywych.

W artykule z roku 1916, w którym A. Einstein opublikował swoją OTW[6], występuje wielkość oznaczona grecką literą α:

$$\alpha = \kappa M / 4\pi \qquad (20)$$

[6] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, [w:] H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *Das Relativitätspricip*, Verlag und Druk von B.G. Teubner, Leipzig, Berlin 1922, s. 81‒124 (zob. s. 121).

gdzie M jest masą grawitacyjną, a κ – stałą występującą w głównych równaniach pola grawitacyjnego. Stała ta związana jest ze stałą grawitacyjną Newtona, która oznaczana jest obecnie literą G[7]. W artykule z roku 1916 związek ten Einstein wyraził zależnością[8]:

$$\kappa = 8\pi G/c^2 \qquad (21)$$

gdzie c to stała prędkość światła w próżni. Jeżeli równanie (21) wprowadzimy do (20), otrzymamy:

$$\alpha = \kappa M / 4\pi = (8\pi GM/c^2)/4\pi = 2GM/c^2$$

Wielkość $\alpha = 2GM/c^2$ nazywana jest obecnie promieniem Schwarzschilda R_{Schwar} i twierdzi się, że jeżeli masa M zawarta jest w sferze o promieniu $R_{Schwar} = \alpha = 2GM/c^2$, to mamy do czynienia ze światem zamkniętym zwanym czarną dziurą. Wielkość α jest wprost proporcjonalna do masy M. Im większa masa, tym większy jest promień Schwarzschilda $R_{Schwar} = \alpha = 2GM/c^2$. Jak widzimy, warunkiem zamknięcia się świata jest to, aby jego masa zawarta była w sferze o promieniu α zależnym od wielkości tej masy. Dodajmy, że Schwarzschild w swej słynnej pracy, w której przedstawił rozwiązanie równania pola grawitacyjnego Einsteina dla punktu materialnego, stosuje również oznaczenia α i nazywa tę wielkość „stałą całkowania", ze względu na funkcję, jaką ona pełni w rozwiązaniu. Dodaje on także, że stała ta zależy od wartości masy punktu materialnego, który umieścił na początku rozważanego przez siebie układu współrzędnych[9].

We wspomnianym już pierwszym artykule kosmologicznym z roku 1917[10] Einstein wprowadził jeszcze drugą stałą, którą oznaczył literą grecką λ. Stała ta została wprowadzona w główne tensorowe równanie pola grawitacyjnego, które w zapisie z 1917 roku ma postać[11]:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - 1/2\, g_{\mu\nu} T) \qquad (22)$$

Zaznaczmy tu tylko, że znajdujący się po prawej stronie równania tensor energii-pędu $T_{\mu\nu}$ prezentuje materię zakrzywiającą czasoprzestrzeń, a tensor $G_{\mu\nu}$, znajdujący się po lewej stronie, opisuje krzywiznę czasoprzestrzeni spowodowaną przez tę materię. Z kolei tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ prezentuje potencjały grawitacyjne. Co spowodowało, że w równaniu (22), stanowiącym zastosowanie głównego równania OTW

[7] Einstein używał litery *K*.

[8] *Ibidem*, s. 121.

[9] K. Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory*, przekł. i przedm. S. Antoci i A. Loinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl., 186, 1916, www.sjcrothers.plasmaresources.com/schwarzschild.pdf.

[10] A. Einstein, *Kosmologische*…, s. 130–139.

[11] *Ibidem*, s. 138.

do wszechświata, pojawiła się wielkość λ? Odpowiedź jest następująca: Bez wielkości λ wszechświat zacząłby się kurczyć z powodu grawitacji. Mogłaby mu zagrozić zapaść grawitacyjna. Aby tego efektu uniknąć, bo Einsteinowi wszechświat wydawał się być statyczny (nie okazywał się ani jako kurczący, ani jako rozszerzający), wprowadził on wielkość λ w celu zrównoważenia oddziaływań grawitacyjnych oddziaływaniem przeciwnym, które dzisiaj nazywany „fizycznym ciśnieniem próżni". Aby lepiej zrozumieć kłopoty Einsteina, spróbujmy w poznane przez nas przestrzenie zamknięte wprowadzić punkty materialne, posiadające masę powodującą przyciąganie grawitacyjne. Od czasów nowożytnych przyjmuje się, że wszechświat w skali globalnej jest jednorodny. W związku z tym z dość znacznym uproszczeniem przyjmuje się, że wszechświat stanowi jednorodny „kurz" punktów materialnych. Jeżeli umieścimy taki kurz o sumarycznej masie, spełniającej warunek zamknięcia $\alpha = 2GM/c^2$, w trójwymiarową przestrzeń, to zamknięta jej średnica, $D = 2R$, zacznie się kurczyć, bo umieszczone na takim jednowymiarowym przekroju wszechświata punkty materialne z racji grawitacji zaczną się do siebie zbliżać. Podobnie dziać się będzie na dwuwymiarowym przekroju wszechświata o powierzchni $A = (4/\pi)R^2$, będzie się on kurczył. Wskutek tego także trójwymiarowa nieeuklidesowa hipersfera zacznie się kurczyć, jej nieeuklidesowa objętość $V_{univ} = 2\pi^2R^3{}_{univ}$ będzie się zmniejszać. Aby uniknąć tego efektu, Einstein wprowadził stałą λ. Zbadajmy, jakie Einstein przypisuje jej wymiary i jak wiąże ją z innymi wielkościami. W artykule kosmologicznym z 1917 roku znajdują się dwa równania[12]:

$$\lambda = \kappa\rho/2 = 1/R^2 \tag{23}$$
$$M = \rho \times 2\pi^2R^3 = 4\,\pi^2\,(R/\kappa) = (32\,\pi^2)^{1/2}/\,(\kappa^3\rho)^{1/2} \tag{24}$$

Wszystkie symbole występujące w tych równaniach są nam już znane, poza symbolem $\rho = M/2\pi^2R^3$, który oznacza gęstość masy zamkniętego wszechświata Einsteina. Jest to gęstość wszechświata zamkniętego, bo występuje tu wzór na objętość trójwymiarowej nieeuklidesowej przestrzeni sferycznej $V = 2\pi^2R^3$.

Z równania Einsteina (23) dowiadujemy się, że jego $\lambda = 1/R^2$ równa się odwrotności kwadratu o boku równym promieniowi jego zamkniętego wszechświata R i ma ona wymiar m^{-2} (metra do minus 2, czyli „na powierzchnię"). Podstawmy teraz do pierwszej części równania (23) stałą Einsteina $\kappa = 8\pi G/c^2$ i dokonajmy prostych przekształceń:

$$\lambda = \kappa\rho/2 = (8\pi G/2c^2)\,\rho = (4\pi G/c^2)\,\rho$$

Dokonując dalszych przekształceń, otrzymamy równanie ukazujące pewną gęstość masy:

[12] *Ibidem*, s. 139.

$$\rho = \lambda c^2/4\pi G \qquad (25)$$

Dzisiaj gęstość tę nazywamy gęstością lambda ρ_λ i wiążemy z energią próżni, którą nazywamy „energią ciemną", bo nie świeci. Jeżeli chcemy otrzymać wzór na gęstość tej energii, musimy obie strony równania (25) pomnożyć przez c^2, bo $E = mc^2$. Otrzymamy wtedy:

$$\rho_\lambda c^2 = \lambda c^4/ 4\pi G = (c^4/4\pi G)\,\lambda$$

Gęstość energii ma wymiar ciśnienia $p = \rho_\lambda c^2$, czyli siły na powierzchnię. Stała c^4/G ma wymiar siły i jest dzisiaj przez wielu autorów interpretowana jako maksymalna siła w przyrodzie[13]. Z kolei λ ma wymiar „na powierzchnię" (m^{-2}). W związku z tym wielkość $p = \rho_\lambda c^2 = (c^4/4\pi G)\,\lambda$ nazwano „fizycznym ciśnieniem próżni". Ciśnienie to pojmowane było przez Einsteina jako przeciwstawiające się zapaści grawitacyjnej. Według Einsteina gęstość energii próżni i gęstość energii grawitacyjnej są sobie równe, $\rho_\lambda c^2 = \rho_m c^2$, aby świat był statyczny. Gdy jednak W. de Sitter wykazał, że nawet pusty wszechświat bez materii, z $\lambda > 0$, jest niestabilny i rozszerza się wykładniczo, oraz gdy A. Friedmann wykazał, że pomimo wprowadzenia λ świat nie jest statyczny, bo istnieje wiele rozwiązań podstawowego równania Einsteina (dopuszczających światy płaskie, zamknięte i otwarte, z możliwościami rozszerzania i kurczenia się, z lambdą i bez niej), oraz gdy E. Hubble rozpoczął wykazywać, na podstawie przesunięć widma światła pochodzącego z galaktyk ku czerwieni (zjawisko Dopplera przy oddalaniu się źródła światła), że wszechświat się rozszerza, Einstein uznał wprowadzenie stałej λ za „największą pomyłkę" swego życia.

Pomyłka ta okazała się jednak przydatna. Dzisiaj λ służy wielu autorom do wskazywania na źródło rozszerzania się wszechświata, na energię napędzającą to rozszerzanie. Idea Einsteina o statyczności wszechświata (w którym $\lambda = 1/R^2$) została porzucona. Wielkość λ podawana jest obecnie jako różna od $1/R^2$. W modelu standardowym (w którym, jak zobaczymy, $k = 0$ i $\lambda > 0$) wielkość λ wyznaczana jest równaniem $\lambda = 3\Omega_\lambda/R^2_H$, gdzie R_H to promień sfery Hubble'a (promień świata obserwowalnego), a $\Omega_\lambda = \rho_\lambda/\rho_o$ to parametr gęstości związany z energią ciemną, gdzie ρ_λ to gęstość masy związanej z tą energią, a $\rho_o = \rho_m + \rho_\lambda$ to obecna łączna gęstość masy, przy czym ρ_m to gęstość masy materii, która jest źródłem grawitacji.

Dodajmy, że według dokonanych, na podstawie obecnych obserwacji WMAP – 7 *year*, wyliczeń szacunkowych $\Omega_\lambda = \rho_\lambda/\rho_o = 0{,}728 \pm 0{,}016$, a $\Omega_m = \rho_m/\rho_o = 0{,}272 \pm 0{,}016$. Stąd dochodzimy do wniosku, że 73% energii wszechświata to energia ciemna (źródło rozszerzania się wszechświata), a 27% to energia materii (źródło grawitacji).

---

[13] L. Kostro, B. Lange, *Is c^4/G the Greatest Possible Force in Nature?*, „Physics Essays" March 1999, vol. 12, nr 1, s. 182–189.

Co do tego, czy wszechświat jest zamknięty, płaski, czy otwarty toczą się w dalszym ciągu spory, chociaż przeważa, i to znacznie, pogląd o płaskości świata. W modelu standardowym, na podstawie obserwacji m.in. tzw. promieniowania tła, utrzymuje się, że wszechświat w skali globalnej ukazuje się jako płaski. Dlatego w modelu tym stosuje się równanie Friedmanna z założeniem, że $k = 0$, a $\lambda > 0$. Niemniej obserwacje i wyliczenia nie dostarczają idealnej jedności stosunku obecnej gęstości rzeczywistej wszechświata ρ_o do tzw. gęstości krytycznej $\rho_{co} = 3H_o^2/8\pi G$. Wszechświat byłby w pełni płaski, gdyby parametr gęstości $\Omega = \rho_o/\rho_{co} = 1$, tymczasem na podstawie obserwacji i wyliczeń na bazie satelity WMAP – 7 *year* otrzymujemy, że $\Omega = \rho_o/\rho_{co}$ mieści się między 0,991 a 1,173. A zatem parametr Ω jest bliski jedności, ale możliwe jest małe odstępstwo od niej. Laureat Nagrody Nobla Georgie Smooth nie wyklucza, że wszechświat jest lekko zakrzywiony dodatnio, a co za tym idzie – jest zamknięty i wtedy należy stosować równanie Friedmana z $k = +1$ i $\lambda > 0$.

O lokalnej krzywiźnie przestrzeni mówi się w związku z obserwowanymi tzw. soczewkami Einsteina (pierścienie i krzyże Einsteina). Zdjęcia pierścieni (nawet podwójnych) i krzyży Einsteina można obejrzeć w internecie.

O lokalnym zamknięciu przestrzeni mówi się w związku z tzw. czarnymi dziurami, powstającymi na skutek zapaści grawitacyjnej. Ponieważ masa materii zakrzywia przestrzeń, ciała niebieskie, zwłaszcza te masywne, według kosmologii relatywistycznej nie stanowią kul euklidesowych. Ich promień jest zakrzywiony i przez to dłuższy. Przyrost promienia, jak wskazuje w swym podręczniku Feymann, wyraża równanie:

$$\Delta r = GM/3c^2 \qquad (26)$$

Jeżeli w równanie (26) wstawimy masę Słońca $M☉ = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg, to przekonamy się, że przyrost promienia naszej gwiazdy równa się 492,27 m, czyli prawie 0,5 km, a promień Schwarzschilda 2953,64 m, czyli prawie 3 km. Masa naszej galaktyki wynosi $5{,}8 \times 10^{11}$ $M☉ = 1{,}15362 \times 10^{42}$ kg. Gdyby nasza galaktyka miała kształt kuli, to przyrost promienia takiej kuli wynosiłby $2{,}855 \times 10^{14}$ km, a promień Schwarzchilda $1{,}713 \times 10^{15}$ km. Gdyby nastąpiła zapaść grawitacyjna omawianej kuli i cała masa galaktyki zeszłaby pod promień Schwarzschilda, to obwód $2R$ promienia zamknąłby się i miałby $5{,}71 \times 10^{14}$ km. Wtedy nasza galaktyka byłaby czarną dziurą, hiperkulą bez powierzchni, o wewnętrznej gęstości $\rho = M_{galak}/2\pi^2 R^3_{Schwar\text{-}galak} = 1{,}1627 \times 10^{-5}$ kg/m^3, tj. o ponad 103 tysiące razy rzadszej niż gęstość powietrza = 1,2 kg/m^3. Dodajmy, że gęstość czarnej dziury jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu jej masy, $\rho = (c^6/2\pi^2 G^3)(1/M^2)$.

Wniosek końcowy

Według modelu standardowego współczesnej kosmologii wszechświat jawi się nam w skali globalnej jako płaski, ale nie mamy pewności, czy tak jest naprawdę.

Natomiast zamkniętymi tworami są pojawiające się lokalnie, głównie w środkach galaktyk, czarne dziury. Jednakże idea Einsteina o zamkniętym wszechświecie nie została porzucona tak do końca, bo z jednej strony mamy do czynienia z tworami zamkniętymi, którymi są czarne dziury, a z drugiej strony można by tu podać dość długą listę autorów, którzy nie zrezygnowali z idei twórcy OTW i kontynuują konstruowanie modeli zamkniętych całego wszechświata lub modeli składających się z wielu światów zamkniętych, hierarchicznie uporządkowanych. Do tych autorów należy na przykład Tianxi Zhang, kosmolog z Alabama University w USA[14].

Słowa klucze

jedno- dwu- i trójwymiarowe przestrzenie zamknięte, modele wszechświatów zamkniętych

Streszczenie

Idea zamkniętych wszechświatów, stosowana we współczesnej kosmologii, poznawczo jest dla wielu mało uchwytna. Celem artykułu jest uczynienie tej idei bardziej zrozumiałą, za pomocą, w miarę możności, prostych intuicji i rozumowań. W ten sposób konstruowanie modeli zamkniętych wszechświatów stanie się, być może, dla czytelnika bardziej przejrzyste. Najpierw ukazane zostały geometryczne przestrzenie zamknięte, a następnie ich zastosowanie w kosmologii.

Intuitions and Reasoning that Can Help in Coming to Know the Models of Closed Universes Constructed by Cosmology
(Abstract)

Within modern cosmology, the concept of closed universes is incomprehensible to many people. Therefore, the purpose of this paper is to try and make this idea more understandable, using simple intuitions and reasoning. Perhaps, in such a way, the construction of closed models of the universe will become more intellectually transparent to the reader. To begin with, closed geometrical spaces will be introduced and subsequently, their applications within modern cosmology.

[14] Tianxi Zhang, *A New CosmologicalModel: Black Hole Universe*, „Progress in Physics" July 2009, vol. 3, s. 3–11.